Zadanie. W I semestrze z matematyki Maciek otrzymał 15 ocen, z których wszystkie to bardzo dobre i dostateczne. Oblicz ile piątek ma Maciek, jeśli trójek ma więcej, a wariancja jego ocen wynosi 0,96.

<u>Rozwiązanie:</u>

Niech:

x – liczba piątek

Wówczas:

$15 - x$ – liczba trójek

Obliczmy średnią arytmetyczną ocen:

$$\overline{X} = \frac{x \cdot 5 + (15 - x) \cdot 3}{15} = \frac{5x + 45 - 3x}{15} = \frac{2x + 45}{15}$$

Obliczmy wariancję ocen:

$$\sigma^2 = \frac{x \cdot (5 - \overline{X})^2 + (15 - x)(3 - \overline{X})^2}{15} = \frac{x \cdot \left(5 - \frac{2x + 45}{15}\right)^2 + (15 - x)\left(3 - \frac{2x + 45}{15}\right)^2}{15} =$$

$$= \frac{x \cdot \left(\frac{75 - 2x - 45}{15}\right)^2 + (15 - x)\left(\frac{45 - 2x - 45}{15}\right)^2}{15} =$$

$$= \frac{x \cdot \left(\frac{30 - 2x}{15}\right)^2 + (15 - x)\left(\frac{-2x}{15}\right)^2}{15} = \frac{\frac{x(30 - 2x)^2}{15^2} + \frac{4x^2(15 - x)}{15^2}}{15} =$$

$$= \frac{x(30 - 2x)^2 + 4x^2(15 - x)}{15^3} = \frac{4x(15 - x)^2 + 4x^2(15 - x)}{15^3} =$$

$$= \frac{4x(15 - x)(15 - x + x)}{15^3} = \frac{4x(15 - x) \cdot 15}{15^3} = \frac{4x(15 - x)}{15^2}$$

Wariancja ocen Maćka wynosi 0,96, zatem:

$$\frac{4x(15 - x)}{225} = 0{,}96$$

$$4x(15-x)=216$$

$$60x-4x^2=216$$

$$4x^2-60x+216=0$$

$$x^2-15x+54=0$$

$$\Delta=(-15)^2-4\cdot 1\cdot 54=225-216=9$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{9}=3$$

$$x_1=\frac{15-3}{2}=\frac{12}{2}=6$$

$$x_2=\frac{15+3}{2}=\frac{18}{2}=9$$

Maciek ma więcej trójek, zatem:

$$x=6$$

Odpowiedź: Maciek ma 6 piątek (i 9 trójek).