Zadanie Dana jest funkcja logarytmiczna o wzorze $f(x) = \log_{\frac{2}{3}}(x-1)+p$, gdzie p jest parametrem. Wartość funkcji f dla argumentu $3\frac{1}{4}$ wynosi 3. Oblicz wartość parametru p, a następnie:

a) Wyznacz argument, dla którego wartość funkcji wynosi 6.
b) Wyznacz zbiór argumentów dla których funkcja przyjmuje wartości mniejsze od 1.

Rozwiązanie:

Wartość funkcji f dla argumentu $\frac{13}{4}$ wynosi 3, zatem:

$$\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{13}{4}-1\right)+p=3$$

$$\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{9}{4}\right)=3-p$$

$$-2=3-p$$

$$p=5$$

Zatem:

$$f(x)=\log_{\frac{2}{3}}(x-1)+5$$

a) Musimy rozwiązać równanie:

$$\log_{\frac{2}{3}}(x-1)+5=6$$
$$\log_{\frac{2}{3}}(x-1)=1$$
$$x-1=\frac{2}{3}$$
$$x=\frac{5}{3}$$

b) Musimy rozwiązać nierówność:

$$\log_{\frac{2}{3}}(x-1)+5<1$$
$$\log_{\frac{2}{3}}(x-1)<-4$$

Podstawa logarytmu jest mniejsza od 1 $\left(\frac{2}{3}<1\right)$, więc zmieniamy znak nierówności:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}}(x-1)}>\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$$

$$x-1>\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$$
$$x>\frac{81}{16}+1$$

$$x>\frac{97}{16}$$